Probabilités conditionnelles

1. Définition et exemples

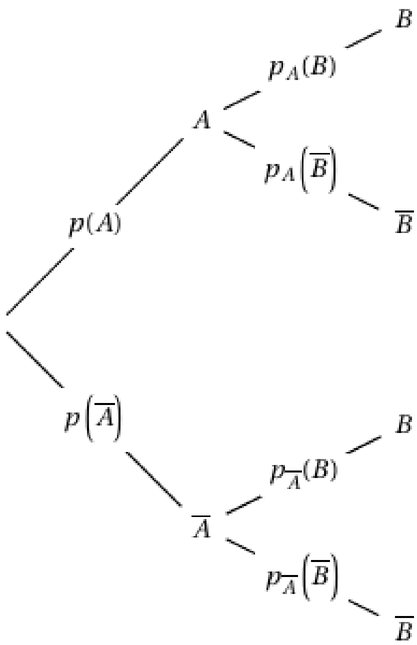
Exemple 5.1 On a regroupé dans le tableau suivant les pourcentages de filles et de garçons d'un club de sports suivant l'activité choisie (chaque adhérent pratiquant un et un seul sport) :

	Curling	Pétanque	Fléchettes
Filles	12	13	27
Garçons	16	12	20

1. On choisit au hasard un élève de ce club de sports. On note F l'événement ≪ c'est une fille ≫, et C l'événement ≪ l'adhérent pratique le curling ≫. On a alors : $p(F) = \frac{52}{100} = 0,52$, $p(C) = 0,28$ et $p(F \cap C) = 0,12$.
2. On rencontre au hasard un adhérent de ce club et c'est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle pratique le curling ? Cette probabilité est $p = \frac{12}{52}$ (il y a 12 "curlingueuses parmi les 52 filles). On a donc : $p = \frac{12}{52} = \frac{0,12}{0,52} \simeq 0,23$. On dit que p est une *probabilité conditionnelle*. On note $p_F(C) = \frac{p(F \cap C)}{p(F)}$. On lit : probabilité de C sachant F.

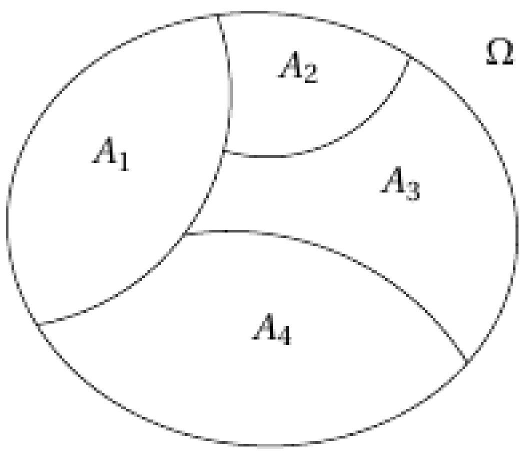
Définition 5.1 Soit A et B deux événements d'un univers Ω. Si $p(B) \neq 0$, on appelle ≪ probabilité de A sachant B ≫ ou ≪ probabilité de A si B ≫ et on note $p_B(A)$ le nombre :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$



Propriété 5.1 Rappel :**probabilités totales**. Si A_1, A_2....A_n forment une partition de l'univers $Omega$, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ...P(A_1 \cap B)$$



Exercice 5.1 On considère deux événements A et B d'un même univers tels que :
$P(A) = 0,1$ $\quad$ $P(B) = 0,2$ $\quad$ et $P(A \cap B) = 0,01$
Avec la formule donnée dans la définition 5.1, calculer :

1. $P_B(A)$
   ....
   ....
   ....
2. $P_A(B)$
   ....
   ....
   ....

Exercice 5.2 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
On considère les événements suivants :
C : « La carte tirée est un cœur »
T : « La carte tirée est un trèfle »
R : « La carte tirée est rouge »
D : « La carte tirée est une dame »
F : « La carte tirée est une figure »

1. Déterminer $P_C(D)$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Déterminer $P_R(C)$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Déterminer $P(F \cap T)$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. Déterminer $P(D \cup C)$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une figure rouge ?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

6. Sachant que la carte tirée est une dame, quelle est la probabilité que la carte soit un trèfle ?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

<u>Exercice</u> 5.3 Une association envisage de proposer des livraisons de paniers de produits fermiers contenant ou non des œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage. On interroge un adhérent au hasard. L'adhérent peut choisir des paniers de petite taille (A), de taille moyenne (B) ou de grande taille (C).
On note (O) l'événement "l'adhérent veut des œufs dans son panier".
On sait que :

- $\frac{2}{3}$ des adhérents choisissent un panier de petite taille
- $\frac{1}{4}$ des adhérents choisissent un panier de taille moyenne
- $\frac{3}{4}$ des adhérents ayant choisi un panier de petite taille veulent des œufs
- $\frac{3}{5}$ des adhérents ayant choisi un panier de taille moyenne veulent des œufs

1. Faire un arbre représentant la situation, sans pour autant chercher à le compléter entièrement tout de suite.

2. (a) Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par des œufs.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Calculer $P(B \cap \overline{O})$ puis dire ce que ce résultat représente.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) La livraison d'œufs ne sera mise en place que si $P(O) \geqslant 0,6$. Est-ce que ce sera le cas ici ?

   ....
   ....
   ....

....

....

3. Dans cette question on considère que $P(O) = 0,675$.
   (a) Calculer $P(C \cap O)$. quelle formule a-t-on utilisé ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) Démontrer que $P_C(O) = 0,3$. Compléter l'arbre précédent.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (c) Un adhérent avait choisi la livraison d'oeufs. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Inversement du conditionnement

Propriété 5.2 Formule de bayes

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Exercice 5.4 Lors d'une soirée, une chaîne tv a retransmis un concours culinaire suivi d'une émission proposant des recettes rapides. On sait que :

- 56% des téléspectateurs ont regardé le concours culinaire
- Un quart des téléspectateurs ayant regardé le concours ont aussi regardé l'émission suivante
- $16,2\%$ des téléspectateurs ont regardé l'émission de recettes rapides

Quelle est la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission de recettes rapides sachant qu'il n'a pas regardé le concours culinaire ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 5.5 Un audioprothésiste compte parmi ses clients 75% de personnes de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, 80% souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux chute à 40% parmi les clients de moins de 50 ans.
Un client ne souffre pas de problèmes auditifs aux deux oreilles. Quelle est la probabilité qu'il soit âgé de plus de 50 ans ?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Rappels sur l'indépendance

Définition 5.2 On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω. Les événements A et B sont dits indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Propriété 5.3 On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω tels que A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ soient de probabilité non nulle. On a alors :
- les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi

Exemple 5.2 On choisit au hasard une carte dans un jeu de trente deux cartes. On note T l'événement ≪ c'est un trèfle ≫, et D l'événement ≪ c'est une dame ≫. $p(T \cap D) = \frac{1}{32}$ (il y a une dame de trèfle dans le jeu). $p(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (il y a huit trèfles dans le jeu). $p(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (il y a quatre dames dans le jeu). On a donc $p(T) \times p(D) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = p(T \cap D)$. Donc les événements D et T sont indépendants. Intuitivement on comprend aisément que si on tire une carte dans le jeu, la chance d'obtenir une dame sachant qu'on a trèfle est la même que celle d'obtenir une dame sans rien savoir sur la carte tirée.
Par contre, en définissant l'événement F : ≪ la carte tirée est une figure ≫, on montre que F et D ne sont pas indépendants. En effet : $p(F \cap D) = p(\texttt{dame de trèfle}) = \frac{1}{32}$; par contre, $p(D) \times p(F) = \frac{1}{8} \times \frac{12}{32} = \frac{3}{64}$.

Remarque 5.1 Pour savoir si deux événements A et B sont indépendants, on a (au moins) deux méthodes :
- on calcule séparément $p(A \cap B)$, puis $p(A) \times p(B)$, et alors A et B sont indépendants si et seulement si les deux calculs précédents sont égaux.
- on calcule séparément $p(A)$ et $p_B(A)$, et alors A et B sont indépendants si et seulement si les deux calculs précédents sont égaux.

Exercice 5.6 Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres de ces deux clubs.
On interroge un élève de la classe, pris au hasard.
Montrer que les événements C "l'élève fait partie du club photo" et T "l'élève fait partie du club théâtre" sont indépendants.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5.7 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par A et B, indépendants l'un de l'autre. 2% des montres fabriquées présentent le défaut A, et 10% le défaut B.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les éléments suivants :

- A : "La montre présente le défaut A"
- B : "la montre présente le défaut B"

1. Montrer que la probabilité que la montre tirée ne présente aucun des deux défauts est égale à $0,882$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Déterminer la probabilité que la montre présente au moins un défaut.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Déterminer la probabilité que la montre présente un et un seul des deux défauts.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....